Министерство науки И Высшего образования

Российской Федерации

Ивановский государственный университет

Факультет математики и компьютерных наук

**КАФЕДРА прикладной математики и компьютерных наук**

**ОТЧЁТ**

о прохождении производственной практики,

научно-исследовательской работы

|  |  |
| --- | --- |
| Направление подготовки: | 02.04.01 Математика и компьютерные науки |
| Выполнил: | студентка 1 курса магистратуры очной формы обучения  \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ Захарова Татьяна Николаевна |
| Руководитель практики  от ИвГУ: | зав. кафедрой прикладной математики и компьютерных наук, кандидат физико-математических наук  \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ Соколов Евгений Викторович |
| Дата сдачи, оценка |  |

Иваново, 2019

**Содержание**

Введение 3

§1. Необходимые определения 4

§2. Вспомогательные утверждения 6

§3. Основная теорема 10

Список литературы 12

**Введение**

Целью работы было доказательство модифицированной версии из статьи А. С. Гудовщиковой и Е. В. Соколова о некоторых аппроксимационных свойствах обобщенных свободных произведений двух групп, основанное на подготовленном ранее доказательстве [1], [4].

В начале работы были повторены все основные определения, на которые далее возможны ссылки. Затем были рассмотрены и доказаны вспомогательные утверждения, необходимые при доказательстве основной теоремы. После этого было пересмотрено доказательство основной теоремы с учетом введенных модификаций.

**§1. Необходимые определения**

Предположим, что дано семейство групп , где пробегает некоторое множество индексов . Составим формальное произведение . Формальные произведения представляют собой системы элементов , одновременно выбранных по одному из каждой группы . Все формальные произведения образуют группу, называемую декартовым произведением групп , если определить умножение следующим образом:

, для любого .

Подгруппа декартова произведения, в которой для всех индексов, кроме конечного числа их, называется прямым произведением групп . Ясно, что прямое и декартово произведения совпадают, когда число групп конечно [2].

Говорят, что группа является расширением группы посредством группы , если в существует такая нормальная подгруппа *,* что . Отметим, что прямое произведение это частный случай расширения.

Пусть некоторое множество простых чисел. Тогда через будем обозначать множество всех простых чисел, не принадлежащих . Подгруппа некоторой группы называется -изолированной в , если для любого элемента и для любого простого числа из включения вытекает, что .

Пусть некоторый класс групп. Если все группы из класса периодические, то через будем обозначать множество простых делителей порядков их элементов. Если же класс содержит хотя бы одну непериодическую группу, то положим равным множеству всех простых чисел.

Пусть подгруппа некоторой группы . Наименьшую по включению -изо­ли­ро­ван­ную подгруппу группы , содержащую , будем называть -изолятором подгруппы в группе и обозначать -. Очевидно, что подгруппа - содержит множество всех корней -степеней, извлекающихся из элементов подгруппы в группе . Хорошо известно, что в локально нильпотентной группе указанное множество образует подгруппу и, следовательно, совпадает с -изолятором.

Если некоторая группа, то через будем обозначать семейство всех ко- подгрупп группы , то есть таких нормальных подгрупп этой группы, фактор-группы по которым принадлежат классу . Если подгруппа группы , то через обозначим множество подгрупп .

Будем говорить, что подгруппа некоторой группы отделима в семейством нормальных подгрупп этой группы, если . Выбирая в качестве семейство всех нормальных подгрупп группы , фактор-группы по которым принадлежат некоторому классу групп , мы получаем определение -отделимой подгруппы. Напомним также, что подгруппа называется -аппроксимируемой, если ее единичная подгруппа -отделима.

Пусть обозначает свободное произведение некоторых групп и с подгруппами и , объединенными относительно изоморфизма .

Через будем обозначать семейство -изолированных циклических подгрупп группы (группы ), не являющихся отделимыми семейством (соответственно, семейством ).

Напомним, что запись элемента в виде называется несократимой, если:

1. Каждый сомножитель является словом либо только от порождающих группы   
   (-сло­гом), либо только от порождающих группы (-слогом);
2. При соседние слоги и не являются одновременно -слогами или -сло­га­ми;
3. При каждый -слог определяет в группе элемент, не принадлежащий подгруппе , и каждый -слог определяет в группе элемент, не принадлежащий подгруппе .

Хорошо известно, что если элемент группы обладает несократимой записью, содержащей более одного слога, то он отличен от единицы. Отсюда легко следует, что любые две несократимые записи элемента имеют одно и то же число слогов, которое мы будем называть длиной элемента и обозначать через

Элемент называется циклически несократимым, если в его несократимой записи при сомножители и не лежат одновременно в или в . Легко видеть, что любой элемент группы сопряжен с некоторым циклически несократимым элементом.

Легко видеть, что если , и , то и потому отображение , переводящее смежный класс , в смежный класс , корректно определено и является изоморфизмом подгрупп. Это дает нам возможность рассмотреть группу — свободное произведение фактор-групп и с подгруппами и , объединенными относительно изоморфизма . Очевидно также, что естественные гомоморфизмы и удовлетворяют соотношению для любого и потому продолжаемы до гомоморфизма группы на группу .

**§2. Вспомогательные утверждения**

Рассмотрим некоторые вспомогательные утверждения, которые нам понадобятся для дальнейшего доказательства теоремы.

**Предложение 1:** Если класс групп замкнут относительно взятия подгрупп и декартовых произведений вида , где , изоморфная копия группы для каждого , то он удовлетворяет слабому условию Грюнберга: для любой группы и любых подгрупп и существует подгруппа , лежащая в .

**Доказательство:** Пусть имеется группа , подгруппы и . Рассмотрим подгруппу .

Покажем, что подгруппа нормальна в . Рассмотрим произвольный элемент , где и . Тогда для любого и потому найдется элемент такой, что .

Покажем, что для любого найдется такой элемент , что . Положим , . Тогда

.

Следовательно, для любого . Значит,

.

Поскольку произвольный элемент, то нормальна в .

Рассмотрим систему представителей смежных классов группы по подгруппе :   
. Покажем, что

.

Пользуясь тем, что система представителей смежных классов, можем записать элемент в виде для подходящих , Тогда

,

так как нормальная подгруппа и .

Отсюда . Обозначим через .

Так как подгруппа нормальна в группе , то для каждого и потому

Фактор-группа по теореме Ремака изоморфна подгруппе декартова произведения . Так как все сомножители этого декартова произведения изоморфны -группе и мощность множества совпадает с мощностью -группы , то и, значит, .

Имеем: , значит расширение -груп­пы при помощи -группы. Таким образом, подгруппа является искомой.

**Предложение 2:** Пусть класс групп содержит хотя бы одну неединичную группу, замкнут относительно взятия подгрупп и удовлетворяет ослабленному условию Грюнберга: для любой группы и любых подгрупп и существует подгруппа , лежащая в . Пусть также класс групп замкнут относительно взятия подгрупп. Если все -изолированные -подгруппы некоторой группы -отделимы, то в любом расширении группы при помощи -группы все -изолированные -подгруппы -отделимы.

**Доказательство:** Пусть некоторое расширение группы при помощи -группы, -изолированная -подгруппа группы , произвольный элемент, не принадлежащий подгруппе . Нам достаточно указать подгруппу такую, что .

Если , то подгруппа искомая. Поэтому далее будем считать, что .

Запишем элемент в виде , где . Заметим, что поскольку , элемент не может принадлежать пересечению . Заметим также, что подгруппа -изолирована в подгруппе : если элемент и простое число таковы, что , то , поскольку -изолирована в . Отсюда

Из условия утверждения теперь следует, что -подгруппа, -отделимая в группе . Поэтому найдется подгруппа такая, что . А так как класс удовлетворяет ослабленному условию Грюнберга, то существует подгруппа , лежащая в .

Если мы предположим теперь, что элемент содержится в подгруппе , то, записав его в виде для подходящих элементов и , получим, что . Левая часть этого равенства представляет собой элемент подгруппы , правая элемент подгруппы , следовательно, . Но в этом случае и, так как лежит в , то , что противоречит выбору подгруппы .

Таким образом, подгруппа искомая.

**Предложение 3:** Пусть класс групп содержит хотя бы одну неединичную группу, замкнут относительно взятия подгрупп и удовлетворяет ослабленному условию Грюнберга: для любой группы и любых подгрупп и существует подгруппа , лежащая в . Тогда любое расширение -аппроксимируемой группы при помощи -группы -ап­прок­си­ми­руе­мо.

**Доказательство:** Пусть расширение -аппроксимируемой группы группы при помощи -группы , неединичный элемент из . Укажем гомоморфизм группы на группу из класса , переводящий в неединичный элемент. Рассмотрим два случая:

Рассмотрим фактор-группу . по определению расширения, а -группа, значит, гомоморфизм на фактор-группу является искомым.

Так как группа -аппроксимируема, можем найти нормальную подгруппу , не содержащую . Ряд удовлетворяет требованиям из ослабленного условия Грюнберга. Значит, существует подгруппа такая, что . Тогда , соответственно гомоморфизм на фактор-группу является искомым.

**Предложение 4:** Пусть класс групп замкнут относительно взятия подгрупп и прямых произведений конечного числа сомножителей, подгруппа отделима в группе семейством и подгруппа отделима в группе семейством . Тогда для любого конечного множества такого, что найдется подгруппа такая, что и, если , то , где , для каждого элемента .

**Доказательство:** Для каждого элемента зафиксируем несократимую запись этого элемента.

Пусть множество слогов всех таких несократимых записей. Тогда, так как , то .

Возьмем произвольный элемент . Если , тогда воспользуемся отделимостью подгруппы семейством и найдем подгруппу такую, что . Аналогично, если , тогда воспользуемся отделимостью подгруппы семейством и найдем подгруппу такую, что .

Положим .

Из условий, наложенных на класс , и теоремы Ремака получается, что .

В силу выбора подгрупп , , получаем, что , если , аналогично , если . Отсюда следует, что для каждого элемента справедливо равенство и, если , то образ элемента не принадлежит объединенной подгруппе.

**Предложение 5** [1]**:** Если , то группа представляет собой расширение свободной группы при помощи -группы.

**Предложение 6**: Пусть класс групп, содержащий хотя бы одну неединичную группу и замкнутый относительно взятия подгрупп и декартовых произведений вида , где , изоморфная копия группы для каждого , и пусть в свободной группе все -изолированные циклические подгруппы -отделимы.

Если , то в группе все -изолированные подгруппы -отделимы. В частности, такая группа )-аппроксимируема.

**Доказательство:** Так как , то по предложению 5 группа представляет собой расширение свободной группы при помощи -группы. По условию, в свободной группе все -изолированные циклические подгруппы -отделимы. Класс всех циклических групп замкнут относительно взятия подгрупп, поэтому по предложению 2 в группе все -изолированные циклические подгруппы -отделимы.

Заметим теперь, что если класс состоит из периодических групп, то свободные множители группы вкладываются в периодическую -группу и потому не имеют -кручения. По следствию 4.4.5 из [3] каждый элемент конечного порядка группы сопряжен с некоторым элементом одного из ее свободных множителей. Поэтому группа также не имеет -кручения, т.е ее единичная подгруппа -изолирована. Если же класс содержит хотя бы одну непериодическую группу, то множество по определению включает все простые числа и потому любая подгруппа является -изолированной. Из доказанного теперь следует, что единичная подгруппа группы -отделима в этой группе. Это равносильно )-ап­прок­си­ми­руе­мо­сти группы .

**Предложение 7** [1]**:** В -аппроксимируемой группе -изолятор произвольной локально циклической подгруппы является локально циклической группой.

**Предложение 8** [1] **:** Если один из любых двух элементов имеет четную длину и для некоторого простого , то другой элемент также имеет четную длину и .

**Предложение 9** [1]**:** Если циклическая подгруппа группы -отделима в этой группе, то она не сопряжена ни с какой подгруппой из семейства .

**§3. Основная теорема**

**Теорема:** Пусть класс групп, содержащий хотя бы одну неединичную группу и замкнутый относительно взятия подгрупп, прямых произведений конечного числа сомножителей и декартовых произведений вида , где , изоморфная копия группы для каждого , и пусть в каждой свободной группе все -изолированные циклические подгруппы -отделимы.

Если подгруппы 1 и отделимы в группе семейством , подгруппы 1 и отделимы в группе семейством , то -изолированная циклическая подгруппа группы отделима в этой группе классом , состоящим из всевозможных расширений -группы при помощи -группы, тогда и только тогда, когда она не сопряжена ни с какой подгруппой из семейства .

**Доказательство:** Необходимость следует из предложения 9. Перейдем к доказательству достаточности.

Пусть -изолированная циклическая подгруппа группы , не сопряженная ни с какой подгруппой из семейства , и пусть произвольный элемент, не принадлежащий . Пусть также порождающий подгруппы и , несократимые записи элементов и . Применяя при необходимости подходящий внутренний автоморфизм группы , мы можем считать далее, что элемент циклически несократим.

В силу предложения 6 для доказательства -отделимости подгруппы нам достаточно указать либо подгруппу такую, что , либо подгруппу такую, что элемент не принадлежит некоторой -изолированной циклической подгруппе группы , содержащей подгруппу .

Пусть сначала и пусть, для определенности, .

В силу своего выбора подгруппа отделима подгруппами из семейства . Поэтому в случае, когда , найдется подгруппа такая, что . Легко видеть, что тогда и, следовательно, подгруппа является искомой.

Пусть . Тогда при . Если же , то каждый слог несократимой записи элемента принадлежит одному из свободных множителей и не входит в объединяемую подгруппу. В силу предложения 4 мы можем найти такую подгруппу , что , и если , то . Понятно, что тогда .

Как и при доказательстве предложения 6, заметим, что группа не имеет -кручения, а ее свободные множители вкладываются в периодическую группу и потому все их циклические подгруппы, в том числе , конечны. Отсюда следует, что подгруппа -изо­ли­ро­ва­на в группе .

Таким образом, искомая группа найдена.

Пусть теперь . Пользуясь предложением 4, выберем подгруппу такую, что и . Заметим, что запись элемента по-прежнему является циклически несократимой.

Для любой подгруппы , лежащей в , имеет место равенство . Поэтому в силу предложения 8 из элемента не могут извлекаться корни сколь угодно высокой степени.

Поскольку группа согласно предложению 6 -аппроксимируема, из предложения 7 и равенства теперь следует, что подгруппа - является циклической. Покажем, что подгруппу можно выбрать таким образом, чтобы элемент не принадлежал подгруппе -.

Запишем число в виде , где является -числом, а -числом, если , и , если . Заметим, что множество не может быть пустым, т.к. класс по условию теоремы содержит хотя бы одну неединичную группу.

Рассмотрим два случая.

Случай 1. не делит .

Так как не делит , то в силу предложения 8 . Покажем, что тогда - и, стало быть, можно положить .

Пусть обозначает порождающий подгруппы - и пусть . Из предложения 8 следует, что тогда . Но является -числом, поэтому оно делит и, стало быть, . Таким образом, предполагая, что -, мы приходим к утверждению , которое противоречит установленному ранее.

Случай 2. для некоторого положительного .

Так как подгруппа -изолирована в группе и , то . Если , то в силу предложения 4 найдется подгруппа такая, что . Если , то, поскольку и единичная подгруппа отделима семейством , также найдется подгруппа такая, что и потому .

Аналогично найдем подгруппу такую, что .

Положим . Тогда по теореме Ремака и в силу условий, наложенных на класс . Поскольку и , имеем также , , . Следовательно, . Как и в разобранном выше случае, отсюда вытекает, что -, и доказательство на этом закончено.

**Список литературы**

1. Гудовщикова А. С., Соколов Е. В. Некоторые аппроксимационные свойства обобщенных свободных произведений двух групп // Вестник Иван. гос. ун-та. Сер.: Естественные, общественные науки. 2012. Вып. 2. С. 115–123.

2. Холл М. Теория групп. М: Изд‑во иностранной литературы, 1962. 468 с.

3. Магнус В., Каррас А., Солитэр Д. Комбинаторная теория групп. М: Наука, 1974. 452 с.

4. Захарова Т. Н. Отчет о прохождении учебной практики, практики по получению первичных профессиональных умений и навыков (исследовательской). Иваново: Иван. гос. ун‑т, 2018.